

# Formelsammlung

**Hinweis:** Alle Variablen, Parameter und Symbole sind wie in den Vorlesungsunterlagen definiert.

## STATISTISCHE GRUNDLAGEN

### Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariable

	Diskret ( $k$ Ausprägungen)	Binär (2 Ausprägungen)
<b>Erwartungswert</b>	$E(Y) = \sum_{i=1}^k y_i p_i = \mu_Y$	$E(Y) = p = \mu_Y$
<b>Varianz</b>	$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^k (y_i - \mu_Y)^2 \cdot p_i = \sigma_Y^2$	$\text{var}(Y) = p(1-p) = \sigma_Y^2$

### Gemeinsame Verteilung zweier Zufallsvariablen

<b>Gemeinsame Verteilungsfunktion</b>	$Pr(X = x, Y = y)$
<b>Bedingte Verteilung</b>	$Pr(Y = y X = x) = \frac{Pr(X = x, Y = y)}{Pr(X = x)}$
<b>Bedingter Erwartungswert</b>	$E(Y X = x) = \sum_{i=1}^k y_i \cdot Pr(Y = y_i X = x)$
<b>Kovarianz</b>	$\sigma_{XY} = \text{cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (x_j - \mu_X)(y_i - \mu_Y) \cdot Pr(X = x_j, Y = y_i)$
<b>Korrelationskoeffizient</b>	$\rho_{XY} = \text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

### Stichprobenstatistiken

<b>Arithmetisches Mittel</b>	$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$	<b>Stichprobenkovarianz</b>	$s_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$
<b>Stichprobenvarianz</b>	$s_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$	<b>Stichprobenkorrelation</b>	$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X \cdot s_Y}$
<b>Stichprobenstandardabweichung</b>	$s_Y = \sqrt{s_Y^2}$	<b>Standardfehler von <math>\bar{Y}</math>:</b>	$SE(\bar{Y}) = s_{\bar{Y}} = \frac{s_Y}{\sqrt{n}}$

## HYPOTHESENTESTS

<b>Berechnung der <math>t</math>-Statistik</b>	$\frac{\text{geschätzter Wert des Parameters} - \text{Wert des Parameters unter der Nullhypothese}}{\text{Standardfehler der Testgröße (bzw. des geschätzten Parameters)}}$								
<b>Zweiseitiger Hypothesentest</b>	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black;">Signifikanzniveau <math>\alpha</math></td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">kritischer Wert</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">10%</td> <td style="text-align: center;">1,64</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">5%</td> <td style="text-align: center;">1,96</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1%</td> <td style="text-align: center;">2,58</td> </tr> </table>	Signifikanzniveau $\alpha$	kritischer Wert	10%	1,64	5%	1,96	1%	2,58
Signifikanzniveau $\alpha$	kritischer Wert								
10%	1,64								
5%	1,96								
1%	2,58								
<b>Berechnung des <math>p</math>-Werts</b>	$2\Phi(- t\text{-Statistik} )$								
<b>(1-<math>\alpha</math>)-Konfidenzintervall</b>	<p>geschätzter Wert des Parameters</p> <p><math>\pm</math> kritischer Wert der <math>t</math>-Statistik für <math>\alpha</math> · Standardfehler des geschätzten Parameters</p>								

## LINEARES REGRESSIONSMODELL

	Mit einer erklärenden Variablen	Mit $k$ erklärenden Variablen
<b>Modell</b>	$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ $i = 1, \dots, n$	$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i$ $i = 1, \dots, n$ $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{U}$
<b>Annahmen</b>	<p><b>A1:</b> <math>E(u_i X_i) = 0</math></p> <p><b>A2:</b> Die Beobachtungen <math>(Y_i, X_i)</math> sind i.i.d.</p> <p><b>A3:</b> Die 4. Momente von <math>X_i</math> und <math>Y_i</math> sind positiv und endlich</p> <p><b>A4:</b> Die Störterme <math>u_i</math> sind homoskedastisch</p> <p><b>A5:</b> Die Störterme <math>u_i</math> sind bedingt auf <math>X_i</math> normalverteilt</p>	<p><b>M1:</b> <math>E(u_i X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}) = 0</math></p> <p><b>M2:</b> Die Beobachtungen <math>(Y_i, X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki})</math> sind i.i.d.</p> <p><b>M3:</b> Die 4. Momente von <math>X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}</math> und <math>Y_i</math> sind positiv und endlich</p> <p><b>M4:</b> Es liegt keine perfekte Multikollinearität vor</p> <p><b>M5:</b> Die Störterme <math>u_i</math> sind homoskedastisch</p> <p><b>M6:</b> Die Störterme <math>u_i</math> sind bedingt auf <math>X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}</math> normalverteilt</p>
<b>OLS-Schätzer</b>	$\hat{\beta}_1 = \frac{s_{XY}}{s_X^2}$ $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$ $\text{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\text{var}[(X_i - \mu_X)u_i]}{[\text{var}(X_i)]^2}$	$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$
<b>Gütemaße</b>	$R^2 = \frac{\text{Explained Sum of Squares}}{\text{Total Sum of Squares}}$ $= \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$ $SER = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2}$ $RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2}$	$R^2 = \frac{\text{Explained Sum of Squares}}{\text{Total Sum of Squares}}$ $= \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$ $\bar{R}^2 = 1 - \left( \frac{n-1}{n-k-1} \right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$ $SER = \sqrt{\frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2}$ $RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2}$

<b>F-Test</b>	$H_0: \mathbf{R}\beta = \mathbf{r}$ wobei $\mathbf{R}: (q \times (k + 1))$ -Matrix, $\mathbf{r}: (q \times 1)$ -Vektor, $q$ : Anzahl der Restriktionen
<b>Ausgelassene Variablen</b>	<p>Geschätztes Modell: <math>Y = \beta_0 + \beta_1 X + u</math></p> <p>Ausgelassene Variable: <math>Z</math></p> <p>Verzerrung des OLS-Schätzers: <math>\hat{\beta}_1 \xrightarrow{p} \beta_1 + \text{corr}(X, u) \frac{\sigma_u}{\sigma_X} = \beta_1 + \gamma \cdot \text{corr}(X, Z) \cdot \frac{\sigma_Z}{\sigma_X}</math></p> <p>wobei <math>\gamma</math> der Effekt von <math>Z</math> auf <math>Y</math> ist</p>

## KAUSALE EFFEKTE UND DIFFERENZENSCHÄTZER

<b>Kausaler Effekt</b>	$E(Y X = 1) - E(Y X = 0)$
<b>Der einfache Differenzenschätzer</b>	<p>Mit Stichprobenmittelwerten</p> $\bar{Y}_{\text{treat}} - \bar{Y}_{\text{control}}$ <p>Als Regressionsmodell</p> $Y = \beta_0 + \beta_1 X + u$ <p>wobei</p> $X = \begin{cases} 1, & \text{wenn Behandlungsgruppe} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
<b>Der doppelte Differenzenschätzer</b>	<p>Mit Stichprobenmittelwerten</p> $(\bar{Y}_{\text{treat, after}} - \bar{Y}_{\text{treat, before}}) - (\bar{Y}_{\text{control, after}} - \bar{Y}_{\text{control, before}})$ <p>Als Regressionsmodell</p> $Y = \beta_0 + \beta_1(X \cdot A) + \beta_2 A + \beta_3 X + u$ <p>wobei</p> $X = \begin{cases} 1, & \text{wenn Behandlungsgruppe} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ $A = \begin{cases} 1, & \text{wenn nach der „Behandlung“ beobachtet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

## MODELLE FÜR BINÄRE ABHÄNGIGE VARIABLEN

<b>Lineares Wahrscheinlichkeitsmodell</b>	$Pr(Y = 1 X_1, X_2, \dots, X_k) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k$
<b>Nichtlineare Modelle</b>	<p><b>Probit</b></p> $Pr(Y = 1 X_1, X_2, \dots, X_k) = \Phi(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k)$ <p><b>Logit</b></p> $Pr(Y = 1 X_1, X_2, \dots, X_k) = F(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k)$

## ZEITREIHEN- UND PROGNOSEMODELLE

<b>Zeitreihe</b>	$Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T$ .
<b>Verzögerte Werte von <math>Y_t</math></b>	$Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots$
<b>Erste Differenz</b>	$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$
<b>Autokovarianz der Ordnung <math>j</math></b>	$cov(Y_t, Y_{t-j})$
<b>Autokorrelation der Ordnung <math>j</math></b>	$\rho_j = corr(Y_t, Y_{t-j}) = \frac{cov(Y_t, Y_{t-j})}{\sqrt{var(Y_t) \cdot var(Y_{t-j})}}$
<b>Stationarität</b>	$var(Y_t) = var(Y_{t-j}), \forall j < t$
<b>Autoregressives Modell der Ordnung <math>p</math></b>	$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_p Y_{t-p} + u_t$

**Tabelle: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung**

Hinweis: Die Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeit  $\Phi(z)$  an.

z-Werte (Teil 1)	Teil 2 des z-Wertes (2. Nachkommastelle)									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

z-Werte (Teil 1)	Teil 2 des z-Wertes (2. Nachkommastelle)									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Quelle: <http://psydok.sulb.uni-saarland.de/volltexte/2004/268/html/zvert.htm>